Lezione 9

FOLIAZIONI

$0 \leq k \leq n$

Def 1: M^n liscia. Una k-FOLIAZIONE in M è una partizione di M in SOTTOVARIETÀ INIETTIVAMENTE IMMERSE di dim k

$\mathcal{F} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ tale che sia "localmente un prodotto", cioè

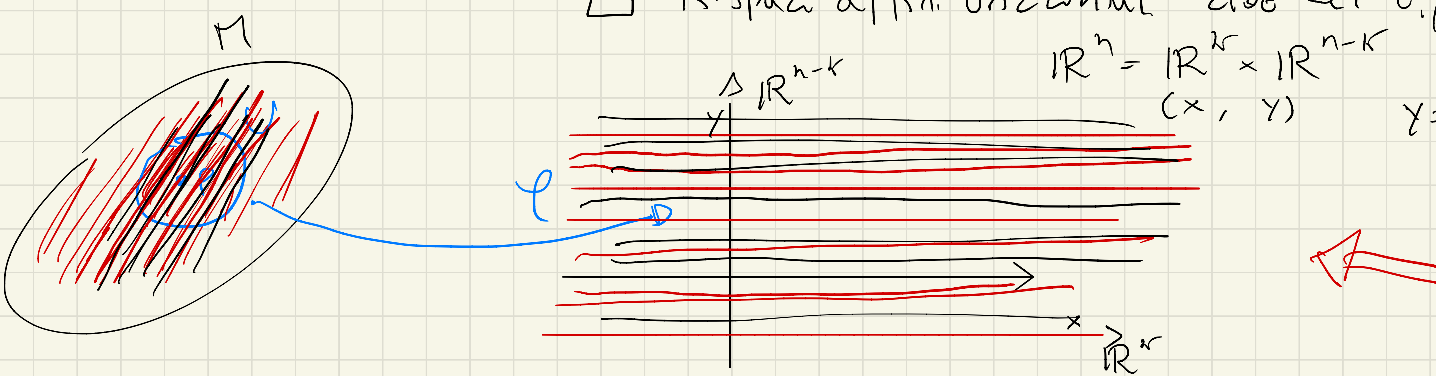
FOGLIE

$\forall p \in M \ \exists \ \varphi : U(p) \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\varphi(U \cap \lambda_i) =$

$\bigsqcup$ k-spazi affini orizzontali cioè del tipo

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$
(x, y)

$y = c \in \mathbb{R}^{n-k}$



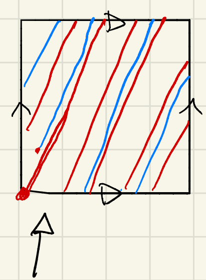
Oss: Ogni $(\lambda_i \cap U) \xrightarrow{\varphi} \{K\text{-spazi affini orizz.}\}$ possono essere ∞ ma sono numerabili

Esempi: a) $M^n = B^{n-k} \times F^k$ prodotto

$\mathcal{F} = \{ \underbrace{\{p\} \times F}_{\lambda_p} \}$ qui λ_p è embedded

b) $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$ fibrato con fibra F $\quad \mathcal{F} = \{ E_p \mid p \in B \}$

fibre = foglie embedded

c) 

$S^1 \times S^1$

$\lambda \to \lambda \in \mathbb{Q}$ si chiude

$\lambda \to \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non si chiude

Ottengo foliazione in curve di pendenza λ

se $k < n$

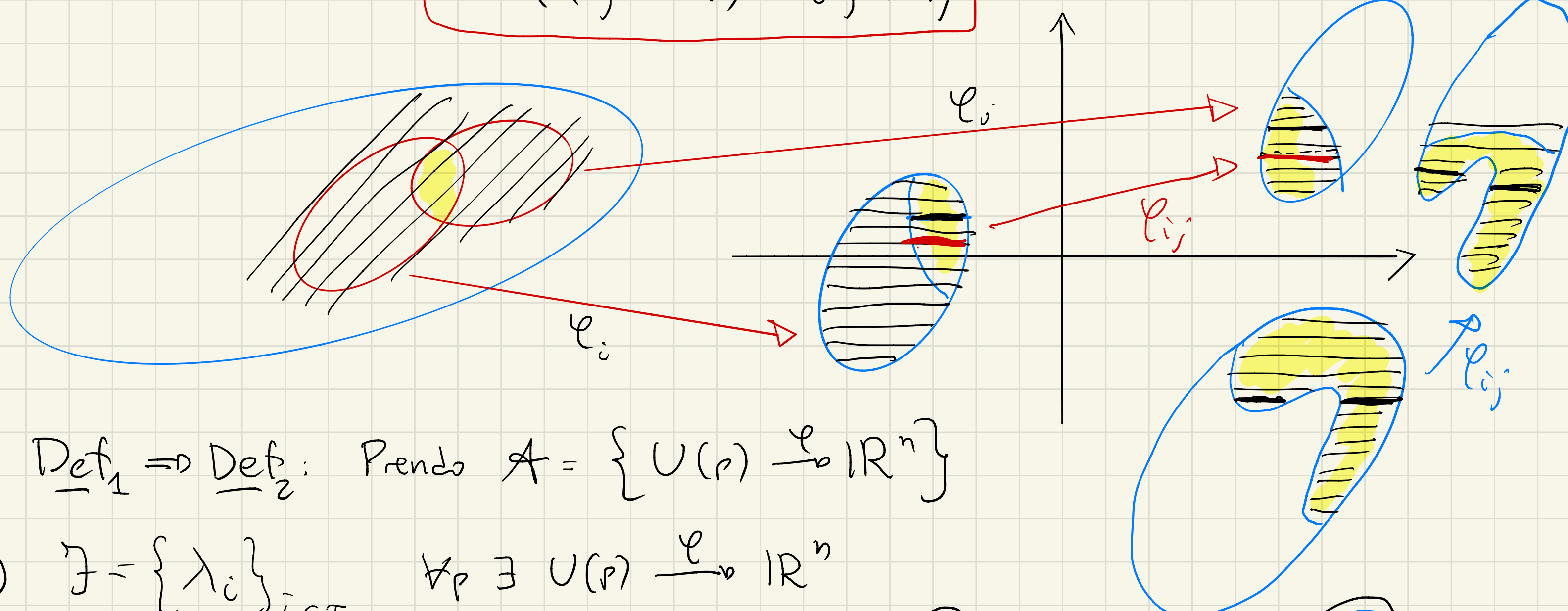
λ_i ha misura nulla

Oss: $\mathcal{F} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ $\quad I$ è + che numerabile

$\underline{Def_2}$: Una FOLIAZIONE in M è $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}$ tale che

$\underline{\text{localmente}}$ $\boxed{\varphi_{i_j}(x,y) = (\varphi^1_{i_j}(x,y), \varphi^2_{i_j}(y))}$

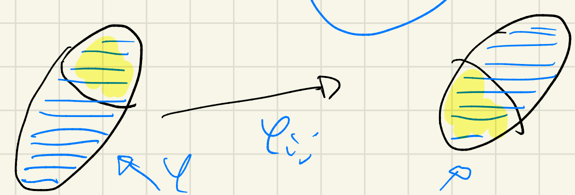
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$
$(x \quad , \quad y)$



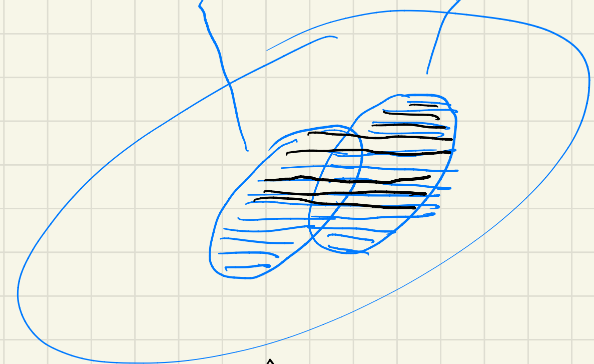
$\underline{Def_1} \Rightarrow \underline{Def_2}$: Prendo $\mathcal{A} = \{U(p) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n\}$

1) $\exists = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ $\quad \forall p \ \exists \ U(p) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$

$\underline{Def_1} \Leftarrow \underline{Def_2}$



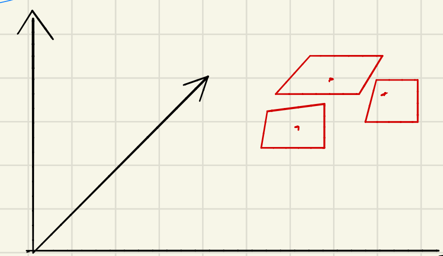
DISTRIBUZIONI



Def: M^n liscia. Una k-DISTRIBUZIONE

è un k-sottofibrato di TM
(cioè rango k)

$D_p \subseteq T_pM$ k-sottospazio



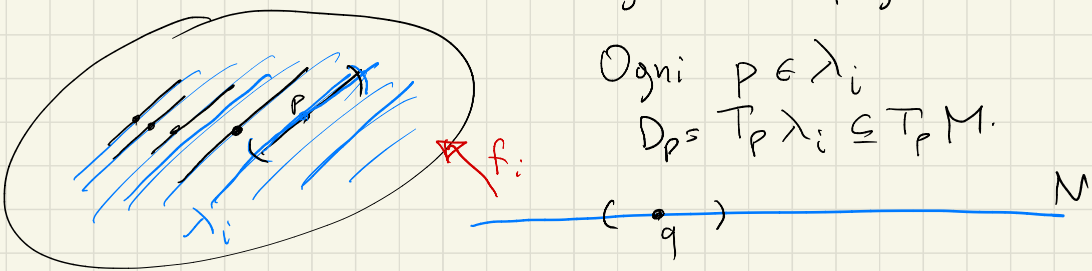
Es: $\exists$ k-foliazione in M $\longrightarrow$ k-distribuzione

$\mathcal{F} = \{\lambda_i\}$ Prendo k-sottospazi tangenti alle foglie

Ogni $p \in \lambda_i$

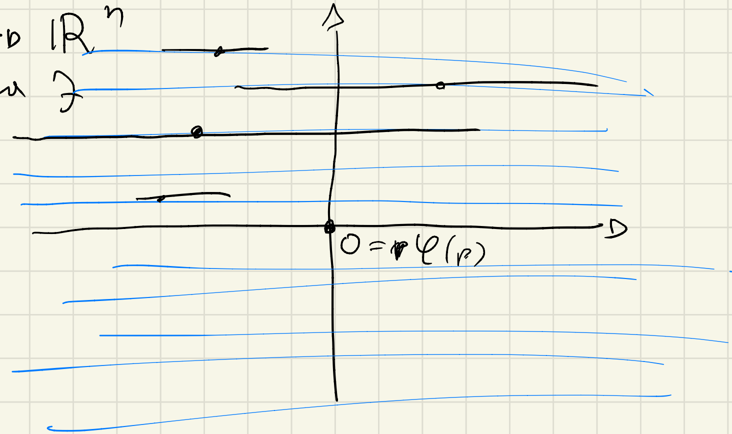
$D_p = T_p\lambda_i \subseteq T_pM$.

LOC. UNA
IMM. ~~INIETT.~~
È EMB.



D è effettivamente una distribuzione

Oss: $\forall p \quad \exists\, U(p) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{R}^n$
che raddrizza $\mathcal{F}$



In $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}$ è orizzontale

e D è costante

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad D(x) = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k)$

Def: D è INTEGRABILE se proviene da $\mathcal{F}$

Def: D è INVOLUTIVA se $\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangenti a D

$\Rightarrow [X,Y]$ tangente a D

$X \in \mathfrak{X}(M)$
TANGENTE a D
se $X(p) \in D_p \quad \forall p \in M$

Teo (Frobenius) D è integrabile $\Leftrightarrow$ è involutiva

dim:

Oss: D è integrabile $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M \quad \exists\, U(p) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$

$\Rightarrow$
"$\Leftarrow$" $\boxed{\text{Ex}}$

che trasforma $D|_U$ in distribuzione orizzontale costante D'

dim: Segue dalla Def$_2$ di foliazione $\qquad D'(x,y) = \{y=0\}$

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\cap}$$

dim (Frobenius): $\quad D$ integrabile $\Leftrightarrow D$ involutiva

$\boxed{\Rightarrow}$

In carte, loc. $\quad D(x_1, \dots, x_n) = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$

X, Y tg a $D \overset{?}{\Rightarrow} [X,Y]$ tg a D

$$X = \sum_{i=1}^{k} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = \sum_{i=1}^{k} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

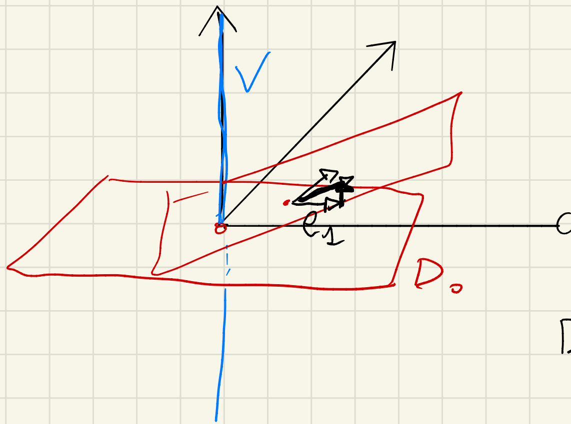
$$\Rightarrow [X,Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \quad \Rightarrow [X,Y]^i = 0 \quad \forall\, i > k$$

perché
Y^i è cost
X^i " "

$\boxed{\Leftarrow}$ $\qquad p \in M \qquad D_p \subseteq T_pM$

Prendo carta $\varphi : U(p) \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi(p) = 0 \quad (d\varphi_p)(D_p) =$

$= \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$



D_0 è orizz. $V = \mathrm{Span}(e_{k+1}, \dots, e_n)$

$\mathbb{R}^n = D_x \oplus V$ per x piccolo

D_0 $e_1, \dots, e_k$

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$

Esiste un unico frame per D

del tipo

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=k+1}^{n} X_1^i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\vdots \\ X_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i=k+1}^{n} X_k^i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}}$$

HANNO LE PRIME K COSTANTI

$[X_i, X_j]^{\ell} = 0$ se $\ell, i, j \leq k$

$\ell = 1, \dots, k$

infatti $[X_i, X_j]^\ell = X_i^k \frac{\partial X_j^\ell}{\partial x^k} - X_j^k \frac{\partial X_i^\ell}{\partial x^k} = 0$

$\Rightarrow [X_i, X_j](p) \in V$

D involutiva, X_i, X_j tg $\Rightarrow [X_i, X_j]$ tg

$\Rightarrow [X_i, X_j] = 0 \quad \forall p$

X_i, X_j commutano $\underset{\text{raddrizz. simult.}}{\Rightarrow}$ $\exists$ carta φ che li trasforma in $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$

$\Rightarrow \varphi$ trasforma D in distrib. orizz.

$\square$

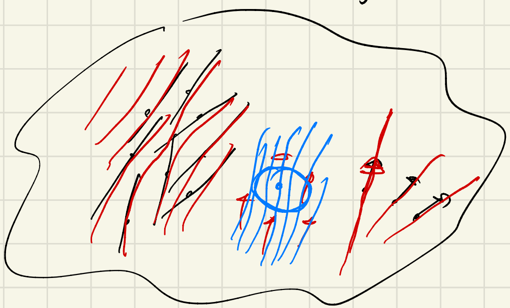
Esempio: $\boxed{X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}}$ in $\mathbb{R}^3$

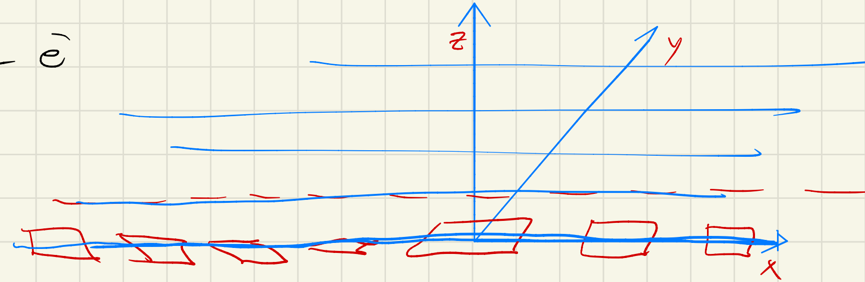
Ex: $[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z}$

$D(x,y,z) = \mathrm{Span}(X_1, X_2)$

non è integrabile $\Rightarrow$ non è involutiva

Ex: Ogni D di rango 1 è integrabile





GRUPPI DI LIE

Prop: D distrib. su M

Se trovo frame $X_1, \dots, X_r$ per D t.c. $[X_i, X_j]$ tg

allora D è involutiva

Dim: Qualsiasi cpo X, Y tg a D è del tipo:

$$X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i \qquad f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{k} g_i X_i \qquad g_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

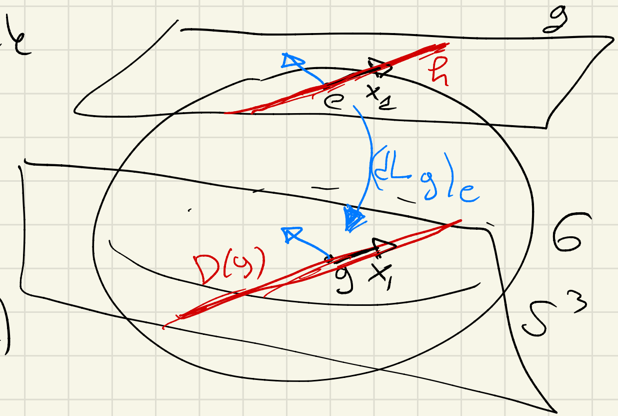
$$[X, Y] = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{k} \underbrace{[f_i X_i, g_j X_j]} = \sum_{i,j=1}^{k} \underbrace{Q \overset{tg}{X_i} + Q' \overset{tg}{X_j} + Q'' \overset{tg}{[X_i, X_j]}}_{tg}$$

<u>Teo</u>: G gruppo di Lie $\mathfrak{g}$ algebra di Lie

$\forall\, \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ sottoalg. di Lie $\exists!\, H < G$ sgr di Lie connesso con alg Lie $= \mathfrak{h}$

<u>dim</u>:

$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = T_e G$ sottospazio vettoriale



$\leadsto D$ distribuzione

$$D(g) = (dL_g)_e(\mathfrak{h})$$

è involutiva, infatti: (uso $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ sottoalgebra)

$X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$ base di $\mathfrak{h}$

estendo a campi vett. inv. a sx

$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ sottoalgebra $\Rightarrow [X_i, X_j](e) \in \mathfrak{h} \Rightarrow [X_i, X_j](g) \in D_g = D(g)$

D involutiva $\Rightarrow$ integrabile (Frobenius)

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{F} = \{\lambda_i\}$ foliazione di G

$H := \lambda_i$ che contiene e Tesi: $H < G$ con algebra $\mathfrak{h}$

sgr? ovvio

$g \in G$ " $L_g : D \to D$ " D è invariante a sinistra

$$(dL_g)_h (D_h) = D_{gh}$$

L_g preserva $D \leadsto$ preserva $\mathcal{F}$ cioè permuta le foglie di $\mathcal{F}$

Se $g \in H$ $\quad L_g(e) = g \Rightarrow L_g(H) = H \Rightarrow g \cdot h \in H \quad \forall g, h \in H$

$e \in H$, $g \in H$

$L_{g^{-1}}(g) = e \qquad L_{g^{-1}}(H) = H$

$g \in H$, $e \in H$

$e \longmapsto g^{-1} \in H$

$H < G$ con alg. $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ $\square$

Oss: Le altre foglie sono le classi laterali sinistre di H